הפקולטה למתמטיקה, טכניון, חיפה

אלגברה 1מ - 104016

מועד ב' – אביב תשס"ג – 25.9.03

שם משפחה: | | |

שאלה 1

נניח שמתקיים

$$\det\begin{pmatrix} x & r & a \\ y & s & b \\ z & t & c \end{pmatrix} = 2$$

אז

$$\det\begin{pmatrix} a+3b & -3a+c & -3c \\ r+3s & -3r+t & -3t \\ x+3y & -3x+z & -3z \end{pmatrix}$$

שווה ל–

א. 54

ב. -54

ג. 6

ד. -6

ה. 0

שאלה 2

נתונה המשוואה

$$z^5 = 81\overline{z} \ , \ \ z \neq 0$$

א. $z = 3i$ הוא אחד הפתרונות של משוואה זו

ב. למשוואה זו יש בדיוק 6 פתרונות שונים

ג. למשוואה זו יש בדיוק 5 פתרונות שונים

ד. למשוואה זו יש בדיוק 5 פתרונות שונים המקיימים $|z| < 2$

ה. למשוואה זו יש בדיוק 4 פתרונות שונים המקיימים $|z| > 2$

שאלה 3

נתונות $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. המטריצה A הפיכה, ומתקיים: $ABA = 5A$. אז BA^2B^2 שווה בהכרח ל–

א. $125I$

ב. $25B$

ג. $25A$

ד. B

ה. $125A$

שאלה 4

יהיו $A, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ מטריצות המקיימות

$$\det(AB + A^2) = 2 \quad \text{וגם} \quad \operatorname{rank}(AB + B^2) = 3$$

אז דרגת B היא

א. 4

ב. 3

ג. 2

ד. 1

ה. אי אפשר לקבוע את דרגת B על–פי הנתונים.

שאלה 5

יהי U התת–מרחב של כל המטריצות הסימטריות ב– $\mathbb{R}^{3\times 3}$, ויהי

$$W = \mathrm{Sp}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{3\times 3}$$

תהי

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in U \cap W$$

ונניח ש– $a_{33} = -8$. אז

א. $a_{22} = 12$

ב. $a_{22} = 9$

ג. $a_{22} = 3$

ד. $a_{22} = 0$

ה. ייתכנו אינסוף ערכים שונים ל– a_{22}

שאלה 6

יהיו U, V, W תת–מרחבים של $\mathbb{R}^{10}$ כך ש– $\dim W = 6$, $\dim V = 3$, $\dim U = 2$ ו– $W \cap U = W \cap V = U \cap V = \{\mathbf{0}\}$. יהי $d = \dim(W \cap (U + V))$. אז בהכרח

א. $d = 6$

ב. $d = 5$

ג. $5 \le d \le 6$

ד. $1 \le d \le 4$

ה. $d = 0$

שאלה 7

תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\mathbb{F}$ שדה כלשהו, ונניח שמתקיים: $A^4 = A^2$. אז

א. בהכרח $A^2 = 0$ או $A = I$ או $A = -I$

ב. בהכרח $\operatorname{rank} A^2 = \operatorname{rank} A$

ג. אם בנוסף A לכסינה, אז בהכרח $A^3 = A$

ד. בהכרח $\operatorname{rank} A \leq n-1$

ה. בהכרח $A + I$ הפיכה

שאלה 8

נתון ש– $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ היא מטריצה שדרגתה 3, ומתקיים:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

הם פתרונות למערכת $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$. אז בהכרח

א. לא קיים פתרון $\mathrm{x} \neq \mathbf{0}$ למערכת $A\mathrm{x} = \mathbf{0}$ שסכום כל רכיביו שווה ל– 0

ב. $\mathrm{b} = \mathbf{0}$

ג. $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$

ד. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$

ה. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ הוא פתרון למערכת $A\mathrm{x} = \mathbf{0}$

שאלה 9

יהיו

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ויהי $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ אופרטור לינארי. נתון שהמטריצה המייצגת את T בבסיס הסדור $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז $T\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ שווה ל–

א. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

ה. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

שאלה 10

נגדיר טרנספורמציה לינארית $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך:

$$T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a-d & a+b \\ a+c & a+b-c-d \end{pmatrix}$$

אז

א. T היא חד–חד–ערכית ועל

ב. T היא חד–חד–ערכית אך אינה על, ו– $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Im} T$

ג. $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T = 2$, ו– $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$

ד. T אינה חד–חד–ערכית ואינה על, ו– $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Im} T$

ה. T אינה חד–חד–ערכית ואינה על, ו– $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$

שאלה 11

תהי A מטריצה ריבועית מרוכבת כלשהי. אז A לכסינה אם ורק אם

א. כל הערכים העצמיים של A שונים מאפס

ב. כל הערכים העצמיים של A שונים זה מזה

ג. A^t לכסינה (A^t היא המטריצה המוחלפת של A)

ד. A^2 לכסינה

ה. A אלכסונית

שאלה 12

נתון ש– A היא מטריצה מרוכבת מסדר 3×3 המקיימת:

$\det(2I - A) = \det A = 0$ וגם $\operatorname{tr} A = 2$

אז

א. בהכרח $\operatorname{rank} A = 1$

ב. כל איברי A בהכרח ממשיים

ג. ממד מרחב הפתרונות של $(5I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ הוא לפחות 1

ד. A היא בהכרח לכסינה

ה. אי אפשר לקבוע על פי הנתונים אם A לכסינה

שאלה 13

יהיו A ו– B מטריצות ממשיות מסדר 5×5 שהערכים העצמיים היחידים של כל אחת מהן הם $\lambda_1 = 0$ ו– $\lambda_2 = 3$. אז

א. אם $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 1$, אז A ו– B בהכרח דומות

ב. אם $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = 4$, אז A ו– B בהכרח דומות

ג. אם $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 12$, אז A ו–B בהכרח דומות

ד. אם $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 3$, אז A ו– B בהכרח דומות

ה. אם $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$ וגם $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, אז A ו– B בהכרח דומות

שאלה 14

מהי הטענה הנכונה מבין הטענות הבאות?

א. 0 הוא ערך עצמי של כל מטריצה אנטי–סימטרית ממשית מסדר זוגי

ב. 0 הוא ערך עצמי של כל מטריצה אנטי–סימטרית ממשית מסדר אי–זוגי

ג. כל מטריצה אנטי–סימטרית ממשית שאינה מטריצת האפס היא הפיכה

ד. לכל מטריצה אנטי–סימטרית ממשית A, 0 הוא ערך עצמי של A^3

ה. 0 הוא ערך עצמי של כל מטריצה אנטי–סימטרית ממשית

שאלה 15

נגדיר

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + \alpha x_2y_2$$

כאשר (x_1, x_2) ו– (y_1, y_2) הם וקטורים כלשהם ב– $\mathbb{R}^2$ ו– α הוא פרמטר ממשי. אז $\langle \cdot, \cdot \rangle$ היא מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$ אם ורק אם

א. $\alpha > 4$

ב. $\alpha \geq 4$

ג. $\alpha > 1/4$

ד. $\alpha \geq 1/4$

ה. $\alpha > 0$

הפקולטה למתמטיקה, טכניון, חיפה

אלגברה 1מ - 104016

מועד ב' – אביב תשס"ג – 25.9.03

דף תשובות

דף זה מיועד לשימושך, אין צורך להחזיר דף זה עם הבחינה.

- משך הבחינה שלוש שעות.
- אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון.
- בבחינה 15 שאלות. בכל שאלה יש לבחור את התשובה הנכונה היחידה, ולסמן אותה ב–X בטבלה שבעמוד זה. אם תסומן יותר ממשבצת אחת לשאלה מסוימת, תשובתך לשאלה זו תפסל. לא יורדו נקודות על תשובות לא נכונות. כל השאלות שוות משקל.
- בסוף הבחינה מצורף דף תשובות נוסף. תוכל לסמן בו את תשובותיך ולשמור אותו לצורך בדיקתן. נא לא לפרק את השאלון. בסוף הבחינה עליך להחזיר את כל השאלון פרט לדף האחרון.

בהצלחה!

תשובות

	א	ב	ג	ד	ה
שאלה 1					
שאלה 2					
שאלה 3					
שאלה 4					
שאלה 5					
שאלה 6					
שאלה 7					
שאלה 8					
שאלה 9					
שאלה 10					
שאלה 11					
שאלה 12					
שאלה 13					
שאלה 14					
שאלה 15					